אלגברה לינארית 2א' - תרגיל בית 1

1. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $T,S:V\to V$ ו$\lambda_T,\lambda_S\in\mathbb{F}$ ע"ע של T,S בהתאמה. הוכיחו או הפריכו:

   (א) $\lambda_T+\lambda_S$ הוא ע"ע של $T+S$.

   (ב) λ_T^2 הוא ע"ע של $T^2:=T\circ T$.

   (ג) לכל $\alpha\in\mathbb{F}$ אז $\alpha\lambda_T$ ע"ע של αT.

2. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ו $T,S:V\to V$ ו $v\in V$ ו"ע משותף של T ושל S עם ע"ע λ_T,λ_S בהתאמה. הוכיחו:

   (א) v ו"ע של $T+S$ ושל $T\circ S$. מצאו את הע"ע המתאימים.

   (ב) $T\circ S-S\circ T$ אינה הפיכה.

3. יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $T:V\to W$ ו $S:W\to V$ העתקה לינארית.

   (א) הראו כי כל ע"ע $\lambda\neq 0$ של $S\circ T$ הוא ע"ע של $T\circ S$.

   (ב) הראו כי אם בנוסף $V=W$ נוצר סופית אז 0 הוא ע"ע של $S\circ T$ אם הוא ע"ע של $T\circ S$.

   (ג) מצאו דוגמה ל V,W,S,T כך ש 0 ע"ע של $S\circ T$ אך לא של $T\circ S$.

4. (משפט פרמה הקטן) יהי p ראשוני ויהי $0\neq a\in\mathbb{F}_p$. הראו כי $a^{p-1}=1$ (הדרכה אפשרית: חשבו את $\prod_{0\neq x\in\mathbb{F}_p}(xa)$ בשתי דרכים).

5.

   (א) יהי $\mathbb{F}$ שדה כלשהו. הראו שלמשוואה $x^2-1=0$ יש לכל היותר 2 פתרונות ב$\mathbb{F}$. האם יכול להיות שאין פתרונות? מתי יש רק פתרון אחד?

   (ב) (משפט ווילסון) יהי p ראשוני. הראו כי $(p-1)!\equiv -1 \pmod p$ (רמז: שנו סדר למכפלה $(p-1)!=\prod_{x\in\mathbb{F}_p\setminus\{0\}}x$ והשתמשו בסעיף הקודם).

6. יהי p ראשוני עם $p\equiv 1 \pmod 4$. הראו כי קיים $n\in\mathbb{Z}$ כך ש n^2+1 מתחלק ב p (רמז: $n=\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ מקיים את התנאי. כמו קודם, אנו ממליצים לחשב את $(p-1)!$ ב2 דרכים - דרך אחת היא הסעיף הקודם והדרך השניה היא קודם להכפיל את a ו $-a$).

7. הוכיחו את הטענות הבאות, אותן ראינו בלינארית 1.

(א) יהיו V מ"ו נ"ס ו $U, W \subseteq V$ תמ"ו, כך ש $U + W = V$. הראו כי קיים $W' \subseteq W$ כך ש $U \oplus W' = V$ (הדרכה: דומה להוכחה של משפט המימדים. בחרו בסיס ל $U \cap W$ והשלימו אותו לבסיס של W. הוקטורים שהוספתם יהיו בסיס של W').

(ב) יהיו $W_1 \subseteq W_2 \subseteq V$ מ"ו נ"ס ו $U \subseteq V$ תמ"ו נוסף. נתון ש $U \cap W_1 = \{0\}$ ו $U + W_2 = V$. הראו כי קיים $W_1 \subseteq W' \subseteq W_2$ כך ש $U \oplus W' = V$ (הדרכה: יהי B_0 בסיס של $U \cap W_2$ ו B_1 בסיס של W_1. הראו ש $B_0 \cup B_1$ בת"ל, השלימו אותו לבסיס $B_0 \cup B_1 \cup B_2$ של W_2. הראו ש $B_1 \cup B_2$ בסיס למרחב המבוקש).

(ג) תהי $T : V \to W$ ט"ל ו $U \subseteq W$ תת מרחב. הראו כי

$$T^{-1}(U) := \{v \in V | Tv \in U\}$$

הוא תמ"ו של V.

לא להגשה אך יש לוודא היכרות עם הטענות מכיוון שנשתמש בהן בהרצאות!

1. ודאו שאתם יודעים להוכיח את הזהויות הבאות עבור מספרים מרוכבים z_1, z_2.

(א) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

(ב) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

(ג) $\overline{z_1}^n = \overline{z_1^n}$.

(ד) $\overline{-z_1} = -\overline{z_1}$.

(ה) $\overline{z_1^{-1}} = \overline{z_1}^{-1}$.

(ו) $z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2 \geq 0$.

(ז) $|\overline{z_1}| = |z_1|$.

(ח) $arg(\overline{z_1}) = -arg(z_1)$.

2. ודאו כי אתם יודעים מהן הצגה פולראית והצגה קרטזית של מספרים מרוכבים ואיך עוברים בין ההצגות. ודאו שאתם מכירים את משפט דה מואבר ויודעים איך לפתור את המשוואה $z^n = re^{i\theta}$ עבור n, r, θ נתונים (z משתנה).